ΠΕΡΙΛΗΠΤΙΚΟ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Συναρτήσεις

Τι ονομάζεται συνάρτηση;

Συνάρτηση είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο ενός άλλου συνόλου Β

Που τέμνει τον άξονα x'x; και που τον y'y;

Μια συνάρτηση τέμνει τον άξονα x'x στις ρίζες της εξίσωσης:**f(x)=0** (μπορεί να είναι πάνω από ένα σημείο) και τον άξονα y'y στο **f(0)** (το πολύ ένα σημείο) .

Που η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον x'x;

Μια συνάρτηση f έχει την γραφική της παράσταση πάνω από τον άξονα **x'x** για εκείνα τα x για τα οποία **f(x)>0** και κάτω από τον άξονα **x'x** για εκείνα τα x για τα οποία **f(x)<0**.

Που τέμνονται δύο συναρτήσεις;

Δύο συναρτήσεις f και g τέμνονται στις λύσεις της εξίσωσης:**f(x)=g(x)**.Μια συνάρτηση f έχει την γραφική της παράσταση πάνω (κάτω) από την γραφική παράσταση της συνάρτησης g για εκείνα τα x για τα οποία **f(x)>g(x)** (**f(x)<g(x)**). Αν θέλουμε να βρούμε σε ποιο διάστημα η συνάρτηση **f** έχει το διάγραμμα πάνω από τον **x'x** λύνουμε την ανίσωση **f(x)>0** .

Πεδίο ορισμού συνάρτηση

Αν μια συνάρτηση δίνεται μόνο με τον τύπο της τότε βρίσκουμε εμείς το "**ευρύτερο**" υποσύνολο του IR στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση.

- **ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ** έχει πεδίο ορισμού (π.ο) ολόκληρο το IR
- **ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ** έχει (π.ο) ολόκληρο το IR εκτός από τις ρίζες του παρονομαστή
- **ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕ ΡΙΖΙΚΑ** έχει (π.ο) το διάστημα εκείνο για το οποίο οι υπόρριζες ποσότητες είναι μη αρνητικές
- **ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ** έχει (π.ο) το διάστημα εκείνο για το οποίο η λογαριθμιζόμενη ποσότητα είναι θετική
- **ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ** έχει (π.ο) το διάστημα ή τα διαστήματα εκείνα που προκύπτουν από την τομή ή την ένωση των διαστημάτων που συναληθεύουν ανάλογα με την κάθε περίπτωση.

Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα;

Μία συνάρτηση f θα λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως φθίνουσα;

Μία συνάρτηση f θα λέγεται **<u>γνησίως φθίνουσα</u>** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

<u>Κάθε (γνησίως) αύξουσα ή φθίνουσα συνάρτηση λέγεται **(γνησίως) μονότονη**</u>

Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο;

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει **<u>τοπικό μέγιστο</u>** στο $x_1 \in A$ όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1

Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο;

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει **<u>τοπικό ελάχιστο</u>** στο $x_1 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης

Πώς βρίσκουμε όριο;

- Στις συναρτήσεις που δεν έχουμε παρονομαστή ή δεν μηδενίζεται ο παρονομαστής στο x_0 **αντικαθιστώ**
- Στις συναρτήσεις που έχουν τη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$ **παραγοντοποιώ-απλοποιώ-αντικαθιστώ**

  Στα πολυώνυμα παραγοντοποιώ με **Horner** στα ριζικά με **συζυγή** παράσταση

Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής;

Μια συνάρτηση f με πεδίου ορισμού Α θα λέγεται **<u>συνεχής</u>** αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

- Αν οι f , g είναι συνεχείς στο $x_0 \in A$ και τότε οι συναρτήσεις: $f+g, f-g, f \cdot g$ είναι συνεχείς στο $x_0 \in A$
- Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι συνεχής στο IR
- Κάθε ρητή συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της
- Οι Τριγωνομετρικές συναρτήσεις **ημ** & **συν** είναι συνεχείς στο IR
- Οι Τριγωνομετρικές συναρτήσεις **εφ** είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους
- Οι εκθετικές συναρτήσεις είναι συνεχείς στο IR
- Η λογαριθμική συνάρτηση είναι συνεχής στο IR_+^*

Πότε η συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0;

Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι **<u>παραγωγίσιμη</u>** στο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν υπάρχει το $\lim\limits_{h \to o} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται

παράγωγος αριθμός και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.Έτσι: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to o}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Κλίση της εφαπτόμενης = εφαπτομένη γωνίας = συντελεστής διεύθυνσης = ρυθμός μεταβολής= ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ !!!!!!!!

Τι λέμε παράγωγος της συνάρτηση f;

Παράγωγος της συνάρτηση f λέγεται μια νέα συνάρτηση με την οποία κάθε x του πεδίου ορισμού της , στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη , αντιστοιχίζεται στο $f'(x)=\lim\limits_{h\to o}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Η συνάρτηση αυτή συμβολίζεται με f' (πρώτη παράγωγος).

$u(t)=x'(t)$, $a(t)=u'(t)=x''(t)$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν για μια παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ συνάρτηση f ισχύει $f'(x)$ >0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν για μια παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ συνάρτηση f ισχύει $f'(x)$ <0 για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

Ασκησιολογία:

Συνέχεια

Α) Αν η f είναι συνεχής μπορούμε να βρούμε το f(x_0) με το όριο της f στο x_0 μέσω του ορίου αφού $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Εξίσωση εφαπτομένης

1. Δίνεται η συνάρτηση f(x) να βρεθεί :

Α) Ο ρυθμός μεταβολής της f(x) στο σημείο x_0

Ρυθμός μεταβολής= $f'(x_0)$

Β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο x_0

Βρίσκω α= $f'(x_0)$ Η εξ. εφ. έχει μορφή y= αx+β Διέρχεται από $(x_0, f(x_0))$

Άρα $f(x_0)=ax_0+\beta$ βρίσκω β

Γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην y= κx+λ

Λόγω παραλληλίας $f'(x)$ =κ βρίσκω x_0 . Η εξ. εφ. έχει μορφή y= κx+β. Διέρχεται από $(x_0, f(x_0))$ Άρα $f(x_0)=ax_0+\beta$. βρίσκω β

Δ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στον x΄x

Λόγω παραλληλίας $f'(x)$=0 βρίσκω x_0 . Η εξ. εφ. έχει μορφή y= 0x+β. Διέρχεται από $\left(x_0, f(x_0)\right)$ Άρα $f(x_0) = 0x_0 + \beta$. βρίσκω β

Ε) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που σχηματίζει με τον x΄x γωνία θ

Είναι $f'(x)$ =εφθ=α βρίσκω x_0 . Η εξ. εφ. έχει μορφή y= αx+β. Διέρχεται από $\left(x_0, f(x_0)\right)$ Άρα $f(x_0) = ax_0 + \beta$. βρίσκω β

ΣΤ) Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f με τον x΄x

Από $f'(x)$ =εφθ βρίσκω θ .

Ζ) Τα κ,λ ώστε η y= κx+λ να εφάπτεται της C_f στο $\left(x_0, f(x_0)\right)$

Από $f'(x_0)$ =κ βρίσκω κ . Διέρχεται από $\left(x_0, f(x_0)\right)$ Άρα $f(x_0) = \kappa x_0 + \lambda$

βρίσκω λ

Μονοτονία

1. Δίνεται η συνάρτηση f(x)= αx+β να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία

Α) f(x)= αx+β

$f'(x_0)$ =α. Η f είναι γνησίως (αύξουσα αν α>0) ή γνησίως (φθίνουσα αν α<0) και δεν παρουσιάζει ακρότατα

Β) f(x)= αx^2+βx+γ

$f'(x)$=2αx+β.

Ο Πίνακας μεταβολών είναι:

(α>0)

x		-β/2α	
f΄	-		+
f	↘		↗

(α<0)

x		-β/2α	
f΄	+		-
f	↗		↘

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (-∞,-β/2α] και γνησίως αύξουσα στο [-β/2α,+∞). Παρουσ. ελάχιστο στο x= -β/2α το f(-β/2α)

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (-∞,-β/2α] και γνησίως φθίνουσα στο [-β/2α,+∞). Παρουσ. μέγιστο στο x= -β/2α το f(-β/2α)

✍ Το πρόσημο της f’ στον πίνακας μεταβολών για f’ πρώτου βαθμού ακολουθεί τον κανόνα:
Δεξιά της ρίζας ομόσημο του α & αριστερά ετερόσημο του α.

Γ) f(x)= αx^{3}βx^2+γx+δ

$f'(x)$=3αx^2+2βx+γ. Δ>0

Ο Πίνακας μεταβολών είναι:

x		ρ_1		ρ_2	
f'	+		-		+
f	↗		↘		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,\rho_1]$ και $[\rho_2,+\infty)$. Γνησίως φθίνουσα στο $[\rho_1, \rho_2]$. Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x=\rho_1$ το $f(\rho_1)$ και τοπικό ελάχιστο στο $x=\rho_2$ το $f(\rho_2)$

x		ρ_1		ρ_2	
f'	-		+		-
f	↘		↗		↘

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,\rho_1]$ και $[\rho_2,+\infty)$. Γνησίως αύξουσα στο $[\rho_1, \rho_2]$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=\rho_1$ το $f(\rho_1)$ και τοπικό μέγιστο στο $x=\rho_2$ το $f(\rho_2)$

Δ) $f(x)=\alpha x^3\beta x^2+\gamma x+\delta$

$f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$. $\Delta=0$

Ο Πίνακας μεταβολών είναι:

(α>0)

x		$-\beta/2\alpha$	
f'	+		+
f	↗		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR και δεν παρουσιάζει ακρότατα

(α<0)

x		$-\beta/2\alpha$	
f'	-		-
f	↘		↘

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR και δεν παρουσιάζει ακρότατα

Ε) $f(x)=\alpha x^3\beta x^2+\gamma x+\delta$

$f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$. $\Delta<0$

(α>0)

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR και δεν παρουσιάζει ακρότατα

(α<0)

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο IR και δεν παρουσιάζει ακρότατα

2. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στα x_1 και x_2 ακρότατα

$f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$.

3. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β] να βρεθούν τα ακρότατα

$a \le x \le \beta \Rightarrow f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$ max $f(\beta)$ και min $f(\alpha)$

(φθίνουσα) $a \le x \le \beta \Rightarrow f(\alpha) \ge f(x) \ge f(\beta)$ max $f(\alpha)$ και min $f(\beta)$

Στατιστική

🕮 Τι ονομάζεται πληθυσμός;

Πληθυσμός είναι το σύνολο των στοιχείων που θέλουμε να εξετάσουμε ως προς ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά

🕮 Τι ονομάζεται μεταβλητή; Σε τι διακρίνονται;

Μεταβλητή είναι το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο εξετάζουμε τα άτομα του πληθυσμού.
Οι μεταβλητές διακρίνονται σε: **ποιοτικές** και **ποσοτικές**. Οι ποσοτικές ιδιαίτερα διακρίνονται σε: **συνεχείς** και **διακριτές**.

✍ **Ποιοτικές** είναι οι μεταβλητές οι οποίες δεν παριστάνονται με αριθμούς. Δηλαδή το σύνολο τιμών της μεταβλητής δεν είναι αριθμητικό σύνολο. Π.χ. χρώμα μαλλιών .

✍ **Ποσοτικές** είναι οι μεταβλητές που εκφράζονται με αριθμούς

- **Συνεχείς** είναι εκείνες που μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα διάστημα (βάρος , ύψος ,χρόνος)και
- **Διακριτές** είναι εκείνες που παίρνουν μόνο συγκεκριμένες τιμές (αριθμός Ι.Χ.) .

🕮 Με ποιόν τρόπο γίνεται η συλλογή στατιστικών δεδομένων;

Γίνεται με:

☞ **Απογραφή** κατά την οποία εξετάζονται όλα τα στοιχεία του πληθυσμού και

☞ **Δειγματοληψία** κατά την οποία εξετάζονται ορισμένα μόνο στοιχεία του πληθυσμού. Το δείγμα να είναι **αντιπροσωπευτικό** του πληθυσμού.

🕮 Τι ονομάζεται συχνότητα;

Συχνότητα (ν_i) (απόλυτη) είναι ο φυσικός αριθμός που δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται στο δείγμα μια συγκεκριμένη τιμή $\mathbf{x_i}$ της μεταβλητής $\mathbf{X}$.

🕮 Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα;

Σχετική συχνότητα (f_i) είναι το πηλίκο τα απόλυτης συχνότητας προς το μέγεθος του δείγματος $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$. Συνήθως εκφράζεται επί τοις εκατό $\left(f_i = \frac{\nu_i}{\nu}\cdot 100\right)$%.

🕮 Τι ονομάζεται αθροιστική συχνότητα;

Αθροιστική συχνότητα (N_i) είναι ο φυσικός αριθμός που εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες του $\mathbf{x_i}$. Δηλαδή $N_i = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_i$.

🕮 Τι ονομάζεται αθροιστική σχετική συχνότητα;

Αθροιστική σχετική συχνότητα (F_i) είναι ο αριθμός που εκφράζει το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες του x_i. Δηλαδή $F_i = f_1 + f_2 + ... + f_i$ **.** Επίσης μπορεί να υπολογιστεί και από τον τύπο: $F_i = \frac{N_i}{v}$ Συνήθως εκφράζεται επί τοις εκατό $\left(F_i = \frac{N_i}{v} \cdot 100 \right)$%.

Ισχύει: **ι)** $N_i - N_{i-1} = v_i$ **ιι)** $F_i - F_{i-1} = f_i$ **ιιι)** $v_1 + v_2 + ... + v_k = v$

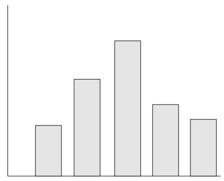
ιν) $0 \le f_i \le 1$

ν) $f_1 + f_2 + ... + f_k = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + ... + \frac{v_k}{v} = \frac{v_1 + v_2 + ... + v_k}{v} = \frac{v}{v} = 1$

Γραφική παράσταση

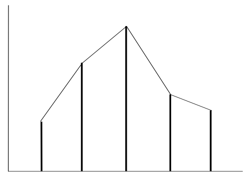
ΡΑΒΔΟΓΡΑΜΜΑ

Το ραβδόγραμμα συνήθως εκφράζει την γραφική παράσταση της κατανομής μιας ποιοτικής μεταβλητής.



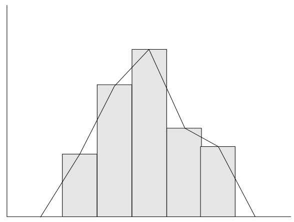
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Χρησιμοποιείται συνήθως στις ποσοτικές διακριτές μεταβλητές. Η γραμμή που ενώνει τις κορυφές, ονομάζεται πολυγωνική γραμμή.

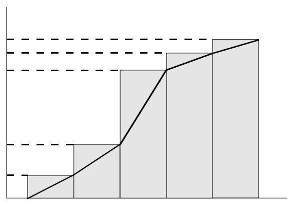


ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ

Το ιστόγραμμα συνήθως χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση της κατανομής μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής οι οποίες προφανώς είναι ομαδοποιημένες. Η πολυγωνική γραμμή που συνδέει τα μέσα των άνω βάσεων λέγεται πολύγωνο συχνοτήτων ή σχετικών συχνοτήτων

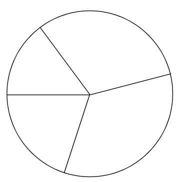


Το εμβαδόν του πολυγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων. Το εμβαδόν κάθε ορθογωνίου μας δίνει την συχνότητα της κλάσης. Στις ίσου πλάτους κλάσεις επειδή το ύψος είναι ανάλογο της συχνότητας μπορούμε να θεωρήσουμε σαν ύψος την ίδια τη συχνότητα. Στο ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων η πολυγωνική γραμμή έχει την μορφή του διπλανού σχήματος. Από αυτή βρίσκουμε τιμές πάνω ή κάτω από ένα ποσό ή ποσοστό και αντίστροφα.



<u>ΚΥΚΛΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ</u>

Κάθε τομέας εκφράζει την συχνότητα της κάθε



παρατήρησης (σχετική ή απόλυτη). Η γωνία κάθε τομέα δίνεται από τον τύπο

$\omega = f_i \cdot 360^0 = \frac{v_i}{v} \cdot 360^0$. Χρησιμοποιείται σε όλες σχεδόν τις μεταβλητές.

Ποια είναι τα μέτρα θέσης;

Μέση τιμή , **Διάμεσος**

Τι ονομάζεται μέση τιμή;

Ονομάζουμε **μέση τιμή** των παρατηρήσεων $t_1, t_2, t_3, ..., t_v$ μιας **ποσοτικής** μεταβλητής και συμβολίζουμε με $\bar{x}$, τον αριθμητικό μέσο των παρατηρήσεων. Δηλαδή: $\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + ... + t_v}{v} = \frac{\sum_{i=1}^{v} t_i}{v}$. Αν οι παρατηρήσεις είναι σε πίνακα κατανομής συχνοτήτων τότε η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο: $\bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + ... + v_\kappa x_\kappa}{v} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} v_i x_i}{v} = \sum_{i=1}^{\kappa} f_i x_i$

Στην περίπτωση που δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στις διάφορες τιμές της μεταβλητής χρησιμοποιούμε τότε τον σταθμισμένο ή **σταθμικό μέσο** όρο. Δηλαδή αν $w_1, w_2, w_3, ..., w_v$ είναι η βαρύτητα των τιμών $x_1, x_2, x_3, ..., x_v$ αντίστοιχα τότε ο μέσος όρος δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + ... + w_v x_v}{w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_v} = \frac{\sum_{i=1}^{v} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{v} w_i} .$$

Τι ονομάζεται διάμεσος;

Ονομάζουμε **διάμεσο** των παρατηρήσεων $t_1, t_2, t_3, ..., t_v$ μιας **ποσοτικής** μεταβλητής και συμβολίζουμε με δ , την μεσαία παρατήρηση, αν το πλήθος ν είναι περιττός και ο μέσος όρος των δυο μεσαίων παρατηρήσεων αν το πλήθος ν είναι άρτιος .

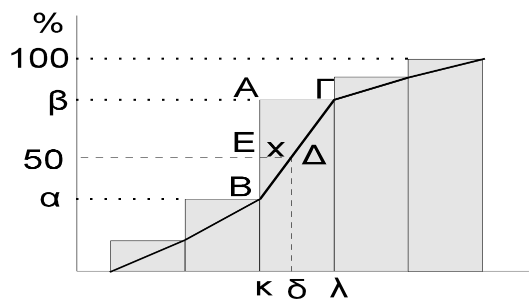
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. είναι μέτρο θέσης που δεν επιρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις .

2. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός (ν) , τότε η διάμεσος είναι η $\frac{v+1}{2}$ παρατήρηση.

3. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός (2ν), τότε η διάμεσος είναι το ημιάθροισμα των ν και ν+1 παρατηρήσεων.

4. Σε ομαδοποιημένες παρατηρήσεις η διάμεσος βρίσκεται από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις %. Από τα όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και



ΒΔΕ έχουμε: $\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\text{ΔΕ}}{\text{ΕΒ}} \Leftrightarrow \frac{\lambda - \kappa}{\beta - \alpha} = \frac{x}{50 - \alpha}$. Δηλαδή η διάμεσος είναι: **δ=κ+x**.

Ποια είναι τα μέτρα Διασποράς;

Εύρος , Διακύμανση , Τυπική απόκλιση

Τι ονομάζεται Εύρος;

Ονομάζουμε **εύρος** μιας ποσοτικής μεταβλητής την διαφορά της ελάχιστης από την μέγιστη τιμή των παρατηρήσεων.

Τι ονομάζεται Διακύμανση;

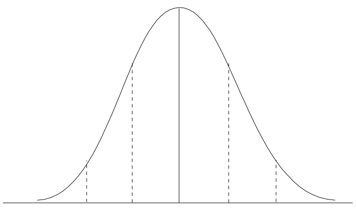
Ονομάζουμε **διακύμανση ή διασπορά** μιας ποσοτικής μεταβλητής την ποσότητα

$$s^2 = \frac{(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (t_\nu - \bar{x})^2}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu} \right) = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \bar{x}^2$$

Τι ονομάζεται Τυπική απόκλιση;

Ονομάζουμε **τυπική απόκλιση** μιας ποσοτικής την τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης. $\mathbf{s = \sqrt{s^2}}$. Η τυπική απόκλιση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες που εκφράζονται και οι παρατηρήσεις.

<u>ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ</u>



Αν η καμπύλη έχει το διπλανό σχήμα λέγεται κανονική. Γενικά αν μια κατανομή είναι κανονική ή περίπου κανονική τότε:

1) Η διάμεσος και η μέση τιμή ταυτίζονται.
2) Στο διάστημα ($\bar{x} - s, \bar{x} + s$) βρίσκεται το 68% των παρατηρήσεων.
3) Στο διάστημα ($\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s$) βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων.
4) Στο διάστημα ($\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s$) βρίσκεται το 99,7% των παρατηρήσεων.
5) Το εύρος ισούται με έξι περίπου τυπικές αποκλίσεις, $R \approx 6s$

Τι ονομάζεται Συντελεστής μεταβολής;

Ονομάζουμε **Συντελεστή μεταβολής** μιας μεταβλητής τον λόγο: $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$.

Είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης (καθαρός αριθμός) και είναι μέτρο **σχετικής διασποράς**. Εκφράζει την μεταβλητότητα των δεδομένων απαλλαγμένων από την επίδραση της μέσης τιμής, Μετρά δηλαδή την **ομοιογένεια** ενός δείγματος. Ένα δείγμα λέμε ότι είναι ομοιογενές αν ο συντελεστής μεταβολής δεν ξεπερνά το 10%.

Πως μεταβάλλονται τα μετρα θέσης και τα μετρα διασποράς;

Αν οι τιμές $\mathbf{x_i}$ της μεταβλητής $\mathbf{X}$ μεταβληθούν κατά ποσό τότε:

Α) Τα μέτρα θέσης μεταβάλονται κατά το ίδιο ποσό

Β) Τα μέτρα διασποράς δεν μεταβάλονται

Αν οι τιμές $\mathbf{x_i}$ της μεταβλητής $\mathbf{X}$ γίνουν: $y_i = ax_i + \beta$ τότε:

Α) $\bar{y} = a\bar{x} + \beta$ $\quad \delta_y = a\delta_x + \beta$

Β) $s_y = |a| s_x$ $\quad s_y^2 = a^2 s_x^2$ $\quad R_y = |a| R_x$

Πιθανότητες

Τι ονομάζεται πείραμα τύχης;

Κάθε πείραμα που , παρότι επαναλαμβάνεται κάτω από τις ίδιες συνθήκες , δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα ονομάζεται **πείραμα τύχης**

Τι ονομάζεται δειγματικός χώρος;

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **δειγματικός χώρος**

Τι ονομάζεται ενδεχόμενο;

Το σύνολο ενός ή περισσοτέρων αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται **ενδεχόμενο**

Το **Ω** λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο** και το $\varnothing$ **αδύνατο ενδεχόμενο**

Πότε δυο ενδεχόμενο λέγονται ασυμβίβαστα;

Δυο ενδεχόμενα Α και Β λέγονται **ασυμβίβαστα** ή **ξένα μεταξύ τους** όταν $A \cap B = \varnothing$

Ποιος είναι ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας;

Σε ένα πείραμα τύχης , με **ισοπίθανα** ενδεχόμενα , ορίζουμε ως πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α τον αριθμό $P(A) = \dfrac{\text{Πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Πλήθος δυνατών περιπτώσεων}} = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$

Ισχύει: $0 \le P(A \cap B) \le 1$ $\quad P(\Omega) = 1$ $\quad P(\varnothing) = 1$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **Μόνο** αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι **ασυμβίβαστα**.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \le P(B)$
$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

Επιπλέον:
$A \cap B \subseteq A \cup B$ οπότε $P(A \cap B) \le P(A \cup B)$
Αν $A \subseteq B$ τότε $A \cap B = A$ και $A \cup B = B$ οπότε $P(A \cap B) = P(A)$ και $P(A \cup B) = P(B)$

$(A')' = A$ $\quad (\Omega)' = \varnothing$ $\quad (\varnothing)' = \Omega$

$A \cap B \subseteq A, B$ και $A, B \subseteq A \cup B$, $\quad A - B \subseteq A$, $\quad (A - B) \cup (A \cap B) = A$

$(A' \cap B') = (A \cup B)'$ $\quad (A' \cup B') = (A \cap B)'$ Τύποι του De Morgan εκτός ύλης αλλά χρήσιμοι στις ασκήσεις

Ασκησιολογία:

1. **Για τα ενδεχόμενα Α και Β ισχύει $P(A)=0,4$ και $P(B)=0,7$ τότε:**
Τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα διότι $P(A)+P(B)=1,1$
$P(A \cap B) \le 0,4$ αφού $A \cap B \subseteq A$
$0 \le P(A \cup B) \le 1$ τότε $0 \le P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le 1$ δηλαδή $0 \le 1,1 - P(A \cap B) \le 1$ οπότε $0,1 \le P(A \cap B) \le 1,1$ άρα $0,1 \le P(A \cap B) \le 0,4$

2. **Πραγματοποιούνται συγχρόνως (ταυτόχρονα) τα ενδεχόμενα A και B:** $A \cap B$

3. **Ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A και B παγματοποιείται:** $A \cup B$

4. **Παγματοποιείται μόνο το B:** $B - A = B \cap A'$

5. **Κανένα από A και B παγματοποιείται:** $(A \cup B)'$

6. **Δεν πραγματοποιούνται συγχρόνως A και B:** $(A \cap B)'$

7. **Ακριβώς ένα από τα A και B πραγματοποιείται:** $(A - B) \cup (B - A)$

Ισχύει: $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A - B) + P(B - A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$